Expression du produit de 2 matrices de Lorentz dans le cas général .

A • Guimier

Résumé :
Soit ***2*** *matrices de Lorentz donnée sous leur forme polaire*
$\boldsymbol{M' = \Lambda(\vec{\beta}').\Omega'}$ ***et*** $\boldsymbol{M'' = \Lambda(\vec{\beta}'') \bullet \Omega''}$ ***,*** *on donne l'expression algébrique du produit* $\boldsymbol{M = M' \bullet M''}$ *en fonction de* $\boldsymbol{\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \Omega', \Omega''}$ ***.***
Un exemple numérique est traité pour illustrer la formule démontrée .

04 / 22

Expression du produit de 2 matrices de Lorentz
dans le cas général :

Résumé :

Soit 2 matrices de Lorentz $M' = \Lambda(\vec{\beta}').\Omega'$ *et* $M'' = \Lambda(\vec{\beta}'') \bullet \Omega''$ *on donne l'expression algébrique du produit* $M = M' \bullet M''$ *en fonction de* $\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \Omega', \Omega''$.

Un exemple numérique est traité pour illustrer la formule démontrée .

On rappelle maintenant qu'une matrice de Lorentz M *peut s'écrire comme un produit d 'une matrice symétrique* Λ *et d'une matrice orthogonale* Ω *et cela d'une manière unique :*

$$M = \Lambda(\vec{\beta}).\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}]\Omega \\ [\gamma\vec{\beta}] & \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \right)\Omega \end{bmatrix}$$

avec ${}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$.

Commençons par étudier le produit de 2 matrices de Lorentz sans rotation :

Si $M = M'.M''$ *est le produit de 2 matrices de Lorentz sans rotation avec :*

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\gamma\vec{\beta})\Omega \\ \gamma\vec{\beta} & C\Omega \end{bmatrix}, \; M' = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\overrightarrow{\gamma'\beta'}) \\ \overrightarrow{\gamma'\beta'} & C' \end{bmatrix}, \; M'' = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\overrightarrow{\gamma''\beta''}) \\ \overrightarrow{\gamma''\beta''} & C'' \end{bmatrix}$$

alors $$M = \begin{bmatrix} \gamma'\gamma''\left({}^t\vec{\beta}'\vec{\beta}'' + 1\right) & \gamma'\gamma''\,{}^t\overrightarrow{\beta''} + \gamma'\,{}^t\overrightarrow{\beta'}C'' \\ \gamma'\gamma''\overrightarrow{\beta'} + \gamma''C'\overrightarrow{\beta''} & \gamma'\gamma''\overrightarrow{\beta'}\,{}^t\vec{\beta}'' + C'C'' \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = \gamma'\gamma''\left({}^t\vec{\beta}'\vec{\beta}'' + 1\right),$$

$$\vec{\beta} = \frac{\gamma'\overrightarrow{\beta'} + C'\overrightarrow{\beta''}}{\gamma'\left({}^t\vec{\beta}'\vec{\beta}'' + 1\right)}, \; C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)} \text{ et } \Omega = C^{-1}\left(\gamma'\gamma''\vec{\beta}'\,{}^t\vec{\beta}'' + C'C''\right).$$

En notant que $\left(\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}\right)\left(\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}\right) = \vec{\beta}\left({}^t\vec{\beta}\vec{\beta}\right){}^t\vec{\beta} = \vec{\beta}^2\left(\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}\right)$ *et que* $\gamma^2\vec{\beta}^2 = \gamma^2 - 1$ *:*

$$\left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \right) \cdot \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma\frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)} \right)$$

$$= Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)} + \gamma^2 \frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)} - \gamma^3 \frac{\vec{\beta}^2\left(\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}\right)}{(1+\gamma)^2}$$

$$= Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)^2}\left(-\gamma(1+\gamma) + \gamma^2(1+\gamma) - \gamma\left(\gamma^2 - 1\right)\right) = Id_{\mathbb{R}^3}.$$

Donc $C^{-1} = \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \right)^{-1} = Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)}$ *, ce qui permet d'écrire* Ω *en fonction de* $\vec{\beta}'$, $\vec{\beta}''$ *:*

$$\Omega = \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta}\,{}^t\vec{\beta}}{(1+\gamma)} \right)\left(\gamma'\gamma''\vec{\beta}'\,{}^t\vec{\beta}'' + C'C''\right) \text{ avec :}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\gamma'\overrightarrow{\beta'} + C'\overrightarrow{\beta''}}{\gamma'\left({}^t\vec{\beta}'\vec{\beta}'' + 1\right)},\ C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2\overrightarrow{\beta'}\,{}^t\overrightarrow{\beta'}}{(1+\gamma')} \text{ et } C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2\overrightarrow{\beta''}\,{}^t\overrightarrow{\beta''}}{(1+\gamma'')},\ \gamma = \gamma'\gamma''\left({}^t\vec{\beta}'\vec{\beta}'' + 1\right).$$

.

Considérons maintenant le produit M *de* 2 *matrices de Lorentz quelconques* M' *et* M'' *avec*

$$M = M'.M'' = \Lambda(\vec{\beta}).\hat{\Omega},\ M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\gamma\vec{\beta})\Omega \\ \gamma\vec{\beta} & C\Omega \end{bmatrix},\ M' = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\gamma'\overrightarrow{\beta'})\Omega' \\ \gamma'\overrightarrow{\beta'} & C'\Omega' \end{bmatrix},$$

$$M'' = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\gamma''\overrightarrow{\beta''})\Omega'' \\ \gamma''\overrightarrow{\beta''} & C''\Omega'' \end{bmatrix} \text{ avec } C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)},$$

$$C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2\overrightarrow{\beta'}\,{}^t\overrightarrow{\beta'}}{(1+\gamma')} \text{ et } C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2\overrightarrow{\beta''}\,{}^t\overrightarrow{\beta''}}{(1+\gamma'')}.$$

En faisant le produit on voit immédiatement que $\gamma = \gamma' \cdot \gamma'' \cdot \left({}^t\beta'.\Omega'.\beta'' + 1\right)$ *et que*

$$\vec{\beta} = \frac{\gamma'\overrightarrow{\beta'} + C'\Omega'\overrightarrow{\beta''}}{\gamma'\left({}^t\vec{\beta}'\Omega'\vec{\beta}'' + 1\right)}$$ *ce qui donne la partie symétrique de* M *:* $\Lambda(\vec{\beta})$.

Nous allons calculer Ω *• Pour cela remarquons que :*

Si A *est une matrice orthogonale et* $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$*, une matrice orthogonale de Lorentz et*

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$$ *, on a :*

${}^t(\hat{A}).\Lambda(\vec{\beta}).\hat{A} = \Lambda({}^tA\vec{\beta})$ *: il suffit de faire le produit matriciel .*

On remarque en particulier si on note $\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$ *:*

$\Lambda(\vec{\beta}).\hat{\Omega} = \hat{\Omega}({}^t\hat{\Omega}\ \Lambda(\vec{\beta}).\hat{\Omega}) = \hat{\Omega}\Lambda({}^t\Omega\vec{\beta})$.

Maintenant revenons au produit M *:*

$M = M'.M'' = \Lambda(\vec{\beta'}).\hat{\Omega'}.\Lambda(\vec{\beta''}).\hat{\Omega''} = \hat{\Omega'}.\Lambda({}^t\Omega'\vec{\beta'}).\Lambda(\vec{\beta''}).\hat{\Omega''}$

or on sait faire le produit des 2 matrices symétriques de Lorentz $\Lambda({}^t\Omega'\vec{\beta'})$ *et* $\Lambda(\vec{\beta''})$

en reprenant les formules antérieures, en remplaçant $\vec{\beta}'$ *par* ${}^t\Omega'\vec{\beta'}$ *,*

$\vec{\beta}$ *par* $\vec{\beta'''}$ *et* Ω *par* Ω''' *:*

$\Lambda({}^t\Omega'\vec{\beta'}) \bullet \Lambda(\vec{\beta''}) = \Lambda(\vec{\beta'''}).\hat{\Omega'''}$ *avec :*

$$\vec{\beta'''} = \frac{\gamma'\,({}^t\Omega'\vec{\beta'}) + C'\,\vec{\beta''}}{\gamma'\left({}^t({}^t\Omega'\vec{\beta'})\,\vec{\beta}'' + 1\right)}$$

$$\Omega''' = \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma'''\frac{\vec{\beta'''}\,{}^t\vec{\beta'''}}{(1+\gamma''')}\right)\left(\gamma'\gamma''\ {}^t\Omega'\vec{\beta'}\,{}^t\vec{\beta}'' + C'C''\right)$$

$$C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2\ ({}^t\Omega'\vec{\beta'})\ {}^t({}^t\Omega'\vec{\beta'})}{(1+\gamma')}\ ,\ C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2\,\vec{\beta''}\,{}^t\vec{\beta''}}{(1+\gamma'')}\ ,\ \gamma''' = \gamma'\gamma''\left({}^t({}^t\Omega'\vec{\beta'})\,\vec{\beta}'' + 1\right)$$

puisque $\gamma(\vec{\beta'}) = \gamma({}^t\Omega'\vec{\beta'})$.

On écrit donc $\Lambda({}^t\Omega'\vec{\beta'}).\Lambda(\vec{\beta''})$ *sous la forme* $\Lambda({}^t\Omega'\vec{\beta'}).\Lambda(\vec{\beta''}) = \Lambda(\vec{\beta'''}).\hat{\Omega'''}$ **.**

D'où :

$M = \hat{\Omega'}.\Lambda(\vec{\beta'''}).\hat{\Omega'''}.\hat{\Omega''} = \hat{\Omega'}.\Lambda(\vec{\beta'''}).({}^t\hat{\Omega'}.\hat{\Omega'}).\hat{\Omega'''}.\hat{\Omega''} = (\hat{\Omega'}.\Lambda(\vec{\beta'''}).{}^t\hat{\Omega'}).\hat{\Omega'}.\hat{\Omega'''}.\hat{\Omega''}$

$= \Lambda(\Omega'\vec{\beta'''}).\hat{\Omega'}.\hat{\Omega'''}.\hat{\Omega''}$ *et par unicité de la décomposition d'une matrice inversible en un produit d'une matrice symétrique et d'une matrice orthogonale on a :*

$M = \Lambda(\vec{\beta}).\hat{\Omega} = \Lambda(\Omega'\vec{\beta'''}).\hat{\Omega'}.\hat{\Omega'''}.\hat{\Omega''}$ *on a* $\hat{\Omega} = \hat{\Omega'}.\hat{\Omega'''}.\hat{\Omega''}$ *et par ailleurs que* $\vec{\beta} = \Omega'\vec{\beta'''}$.

Donnons maintenant une vérification numérique des formules démontrées :

#Programme de vérification
#On donne un exemple illustrant la formule démontrée .
#Au préalable on donne des programmes qui nous seront utile par la suite
restart :

$$Id := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : unprotect(\gamma) :$$

$$f := proc(m)$$

$$return \begin{bmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} :$$

end proc:

$$h := proc(m)$$

$$return \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ 0 & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} :$$

end proc :

$$g := proc(\beta)$$

local $\gamma, \beta x, \beta y, \beta z$ ***:***

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^{\%T} \cdot \beta}} : \beta x := \beta[1] : \beta y := \beta[2] : \beta z := \beta[3] :$$

$$return \begin{bmatrix} \gamma & \beta x \cdot \gamma & \beta y \cdot \gamma & \beta z \cdot \gamma \\ \beta x \cdot \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta x^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta x \cdot \beta y & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta x \cdot \beta z \\ \beta y \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta y \cdot \beta x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta y^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta y \cdot \beta z \\ \beta z \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta z \cdot \beta x & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta z \cdot \beta y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta z^2 \end{bmatrix} :$$

end proc:

#Un proramme qui génére de façon aléatoires des matrices de Lorentz :
#Cas général :
#On génére aléatoirement le vecteur $\vec{\beta}$ ce qui permet de construire la partie symétrique de la matrice .
#On génére aléatoirement trois vecteurs $\vec{\omega 1}$, $\vec{\omega 2}$ et $\vec{\omega 3}$ et par la méthode de Gram − Schmidt
#on obtient un système ortonormal de 3 vecteurs ce qui permet d'avoir la partie ortnonormale
#de la matrice .
#En retour on aura la matrice gérale , vérification qu'elle est bien de Lorentz , la partie symétrique ,
#la partie orthogonale et la vérification que cette dernière est bien orthogonale et finalement β.
#On se limite à 10 chiffres significatifs .

```
with(RandomTools) : with(LinearAlgebra) :
randomize( ) :
p1 :=proc( )
local G, co, β, γ, M, Λ, βx, βy, βz, Ω, GS, ω1, ω2, ω3 :
unprotect(γ) :
```

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} :$$

```
co := evalf(√3) :
```

$$\beta := \begin{bmatrix} \dfrac{Generate(float(range = -1..1, digits = 10))}{co} \\ \dfrac{Generate(float(range = -1..1, digits = 10))}{co} \\ \dfrac{Generate(float(range = -1..1, digits = 10))}{co} \end{bmatrix} :$$

```
βx := β[1] : βy := β[2] : βz := β[3] :
```

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - (\beta x^2 + \beta y^2 + \beta z^2)}} :$$

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \gamma & \beta x \cdot \gamma & \beta y \cdot \gamma & \beta z \cdot \gamma \\ \beta x \cdot \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta x^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta x \cdot \beta y & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta x \cdot \beta z \\ \beta y \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta y \cdot \beta x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta y^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta y \cdot \beta z \\ \beta z \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta z \cdot \beta x & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta z \cdot \beta y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta z^2 \end{bmatrix} :$$

$$\omega 1 := \begin{bmatrix} Generate(float(range = -10..10, digits = 10)) \\ Generate(float(range = -10..10, digits = 10)) \\ Generate(float(range = -10..10, digits = 10)) \end{bmatrix};$$

$$\omega 2 := \begin{bmatrix} Generate(float(range = -10..10, digits = 10)) \\ Generate(float(range = -10..10, digits = 10)) \\ Generate(float(range = -10..10, digits = 10)) \end{bmatrix};$$

$$\omega 3 := \begin{bmatrix} Generate(float(range = -10..10, digits = 10)) \\ Generate(float(range = -10..10, digits = 10)) \\ Generate(float(range = -10..10, digits = 10)) \end{bmatrix};$$

$GS := GramSchmidt(\{\omega 1, \omega 2, \omega 3\}, normalized);$

$$\Omega := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GS[1][1] & GS[2][1] & GS[3][1] \\ 0 & GS[1][2] & GS[2][2] & GS[3][2] \\ 0 & GS[1][3] & GS[2][3] & GS[3][3] \end{bmatrix};$$

$M := \Lambda \cdot \Omega :$

$$return \quad M, \quad M^{\%T} \cdot G \cdot M, \quad \Lambda, \quad \Omega, \Omega \cdot \Omega^{\%T}, \begin{bmatrix} \beta x \\ \beta y \\ \beta z \end{bmatrix} :$$

end proc:

#Un programme qui donne les parties symétriques et orthogonale d'une matrice de Lorentz

$$\#par\ la\ formule : C^{-1}.\mathcal{M} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{\%T} \right) \begin{bmatrix} M[2][2] & M[2][3] & M[2][4] \\ M[3][2] & M[3][3] & M[3][4] \\ M[4][2] & M[4][3] & M[4][4] \end{bmatrix}$$

 # En entrée on a la matricede Lorentz considérée .

#En retour on a la partie orthogonale Ω de la matrice M , la vérification que

```
#Ω est bien orthogonale et que M = Λ·Ω.
p4 :=proc(M)
 local β, βx, βy, βz, γ, Cinv, N, Λ, Ω :
  unprotect(γ) :
 γ := M[1, 1] :
```

$$\beta := \begin{bmatrix} \frac{M[2,1]}{\gamma} \\ \frac{M[3,1]}{\gamma} \\ \frac{M[4,1]}{\gamma} \end{bmatrix} :$$

$$Cinv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{\%T} :$$

$$N := \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{\%T} \right) . \begin{bmatrix} M[2][2] & M[2][3] & M[2][4] \\ M[3][2] & M[3][3] & M[3][4] \\ M[4][2] & M[4][3] & M[4][4] \end{bmatrix} :$$

$$\Omega := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N[1,1] & N[1,2] & N[1,3] \\ 0 & N[2,1] & N[2,2] & N[2,3] \\ 0 & N[3,1] & N[3,2] & N[3,3] \end{bmatrix} :$$

$$\beta x := \beta[1] : \beta y := \beta[2] : \beta z := \beta[3] :$$

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \gamma & \beta x \cdot \gamma & \beta y \cdot \gamma & \beta z \cdot \gamma \\ \beta x \cdot \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta x^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta x \cdot \beta y & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta x \cdot \beta z \\ \beta y \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta y \cdot \beta x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta y^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta y \cdot \beta z \\ \beta z \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta z \cdot \beta x & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta z \cdot \beta y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta z^2 \end{bmatrix} ;$$

```
 return "M=", M, β, Ω, ΩΩ^%T, Λ :
end proc:
```

#Donnée de M1 et M2 et M = M1 • M2

$a := p1(\ ) : M1 := a[1]; \beta 1 := a[6] : \Omega 1 := a[4] : \quad \gamma 1 := M1[1][1] :$

$a := p1(\ ) : M2 := a[1]; \beta 2 := a[6] : \Omega 2 := a[4] : \gamma 2 := M2[1][1] :$

$M := M1 \cdot M2;$

#Calcul des paramétres de M selon 2 manières :

$\gamma := \gamma 1 \cdot \gamma 2.\left(\beta 1^{\%T} \cdot f(\Omega 1) \cdot \beta 2 + 1\right); \gamma v := M[1, 1];$

$$C1 := Id + \frac{\gamma 1^2}{1 + \gamma 1} \cdot \beta 1 \cdot \beta 1^{\%T} :$$

$$C2 := Id + \frac{\gamma 2^2}{1 + \gamma 2} \cdot \beta 2 \cdot \beta 2^{\%T} :$$

$$\beta := \frac{\gamma 1 \cdot \beta 1 + C1 \cdot f(\Omega 1) \cdot \beta 2}{\left(\beta 1^{\%T} \cdot f(\Omega 1) \cdot \beta 2 + 1\right) \cdot \gamma 1}; \beta v := \begin{bmatrix} \frac{M[2, 1]}{M[1, 1]} \\ \frac{M[3, 1]}{M[1, 1]} \\ \frac{M[4, 1]}{M[1, 1]} \end{bmatrix};$$

Calcul du produit intermédiaire

$$C1 := \left(Id + \frac{\gamma 1^2 \cdot \left(f(\Omega 1)^{\%T} \cdot \beta 1\right).\left(f(\Omega 1)^{\%T} \cdot \beta 1\right)^{\%T}}{1 + \gamma 1}\right); C2 := Id + \frac{\gamma 2^2}{1 + \gamma 2} \cdot \beta 2 \cdot \beta 2^{\%T};$$

$$\beta 3 := \frac{\gamma 1.\left(f(\Omega 1)^{\%T} \cdot \beta 1\right) + C1.\ \beta 2}{\gamma 1.\left(\left(f\left(\Omega 1^{\%T}\right) \cdot \beta 1\right)^{\%T} \cdot \beta 2 + 1\right)} :$$

$$\gamma 3 := \gamma 1 \cdot \gamma 2.\left(\left(f\left(\Omega 1^{\%T}\right) \cdot \beta 1\right)^{\%T} \cdot \beta 2 + 1\right); \gamma 3v := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta 3^{\%T} \cdot \beta 3}};$$

$$\Omega 3 := \left(Id - \frac{\gamma 3 \cdot \left(\beta 3.\beta 3^{\%T}\right)}{1 + \gamma 3}\right).\left(\gamma 1 \cdot \gamma 2 \cdot \left(f(\Omega 1)^{\%T} \cdot \beta 1\right).\ \beta 2^{\%T} + C1 \cdot C2\right);$$

#Calcul de Ω

$\Omega := f(\Omega 1) \cdot \Omega 3 \cdot f(\Omega 2);$

#Vérification de l'orthogonalité de Ω :

$\Omega \cdot \Omega^{\%T};$

#Vérification avec un autre programme :

$\Omega v := f(p4(M)[4]);$

#Calcul de Λ

$\Lambda := g(f(\Omega 1) \cdot \beta 3);$

#Vérification avec un autre programme :

$\Lambda v := p4(M)[6];$

#Vérification ultime :

$\Lambda := g(f(\Omega 1) \cdot \beta 3); Mf := \Lambda \cdot h(\Omega); Mv := M;$

$$M1 := \begin{bmatrix} 1.67468551100000 & -0.786693928656870 & 0.152452215757818 & -1.07816628862018 \\ 0.847421806900000 & -0.262286367684665 & 0.788973259660187 & -1.01333645718720 \\ 0.543319685500000 & 0.0222809515380425 & -0.627838230770929 & -0.948956793240696 \\ -0.889523221600000 & 1.24482800374528 & 0.0811297070426241 & 0.484843041413859 \end{bmatrix}$$

$$M2 := \begin{bmatrix} 1.17560683700000 & 0.429704069249763 & 0.368763942601609 & -0.247828572708692 \\ -0.109397508100000 & 0.0281109462715493 & -0.795176919184823 & -0.615525188553972 \\ 0.159600840600000 & -0.453459541284826 & 0.557939415794519 & -0.713127256086562 \\ 0.587035937400000 & 0.989055006419444 & 0.438616143292397 & -0.417129788916830 \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} 1.44624323586195 & -0.437992209308167 & 0.855282447038959 & 0.410212454925417 \\ 0.555984223454041 & -1.00324546777367 & 0.516796223221964 & -0.188516984260923 \\ -0.0209823936898763 & -0.419778212709573 & -0.583884053574633 & 0.695202072552982 \\ -0.884342003856170 & 0.0955089428148110 & -1.05995714088802 & -0.805872002215380 \end{bmatrix}$$

$$\gamma := 1.44624323570801$$

$$\gamma v := 1.44624323586195$$

$$\beta := \begin{bmatrix} 0.384433413161911 \\ -0.0145082053021837 \\ -0.611475291378323 \end{bmatrix}$$

$$\beta v := \begin{bmatrix} 0.384433413182174 \\ -0.0145082052379460 \\ -0.611475291242492 \end{bmatrix}$$

$$C1 := \begin{bmatrix} 1.23138695552407 & -0.0448401249527581 & 0.317116487093209 \\ -0.0448401249527581 & 1.00868949937660 & -0.0614535200293941 \\ 0.317116487093209 & -0.0614535200293941 & 1.43460905632545 \end{bmatrix}$$

$$C2 := \begin{bmatrix} 1.00550090878963 & -0.00802531686643268 & -0.0295183245490957 \\ -0.00802531686643268 & 1.01170819464013 & 0.0430645038723615 \\ -0.0295183245490957 & 0.0430645038723615 & 1.15839773344865 \end{bmatrix}$$

$$\gamma 3 := 1.44624323570801$$

$$\gamma 3v := 1.446243236$$

$$\Omega 3 := \begin{bmatrix} 0.975554098856391 & -0.0298585577336796 & -0.217721534445259 \\ 0.0511654485505307 & 0.994360729876032 & 0.0928915267173489 \\ 0.213720136800983 & -0.101760529573219 & 0.971580412367140 \end{bmatrix}$$

$$\Omega := \begin{bmatrix} -0.903698229747633 & 0.322406907778476 & -0.281750416398464 \\ -0.423535045291322 & -0.576547958669593 & 0.698720626762929 \\ -0.0628297304816074 & -0.750763769356264 & -0.657575994735920 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.00000000177299 & -1.411456099603121\,10^{-9} & 1.191962442753521\,10^{-9} \\ -1.411456099603121\,10^{-9} & 0.999999997499976 & 2.244737405730591\,10^{-10} \\ 1.191962442753521\,10^{-9} & 2.244736850619071\,10^{-10} & 1.00000000126335 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega v} := \begin{bmatrix} -0.903698229395731 & 0.322406908116973 & -0.281750416658580 \\ -0.423535044753133 & -0.576547958472331 & 0.698720626679344 \\ -0.0628297303917543 & -0.750763769572174 & -0.657575994964109 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda} := \begin{bmatrix} 1.446243236 & 0.555984223336941 & -0.0209823939197258 & -0.884342004369736 \\ 0.555984223336941 & 1.12636456265454 & -0.00476889616615003 & -0.200993995744189 \\ -0.0209823939197258 & -0.00476889616615003 & 1.00017997427574 & 0.00758535047791896 \\ -0.884342004369736 & -0.200993995744189 & 0.00758535047791896 & 1.31969869935496 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda v} := \begin{bmatrix} 1.44624323586195 & 0.555984223454041 & -0.0209823936898763 & -0.884342003856171 \\ 0.555984223454041 & 1.12636456268866 & -0.00476889611419295 & -0.200993995639406 \\ -0.0209823936898763 & -0.00476889611419295 & 1.00017997427177 & 0.00758535038927398 \\ -0.884342003856171 & -0.200993995639406 & 0.00758535038927398 & 1.31969869893530 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda} := \begin{bmatrix} 1.446243236 & 0.555984223336941 & -0.0209823939197258 & -0.884342004369736 \\ 0.555984223336941 & 1.12636456265454 & -0.00476889616615003 & -0.200993995744189 \\ -0.0209823939197258 & -0.00476889616615003 & 1.00017997427574 & 0.00758535047791896 \\ -0.884342004369736 & -0.200993995744189 & 0.00758535047791896 & 1.31969869935496 \end{bmatrix}$$

$$Mf := \begin{bmatrix} 1.44624323600000 & -0.437992209449980 & 0.855282447202797 & 0.410212455343449 \\ 0.555984223336941 & -1.00324546808663 & 0.516796222889292 & -0.188516983975137 \\ -0.0209823939197258 & -0.419778213207286 & -0.583884053854022 & 0.695202072596314 \\ -0.884342004369736 & 0.0955089427883110 & -1.05995714092605 & -0.805872002145374 \end{bmatrix}$$

$$Mv := \begin{bmatrix} 1.44624323586195 & -0.437992209308167 & 0.855282447038959 & 0.410212454925417 \\ 0.555984223454041 & -1.00324546777367 & 0.516796223221964 & -0.188516984260923 \\ -0.0209823936898763 & -0.419778212709573 & -0.583884053574633 & 0.695202072552982 \\ -0.884342003856170 & 0.0955089428148110 & -1.05995714088802 & -0.805872002215380 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Bibliographie :

E.Gourgoulhon ."Relativité restreinte" • *EDP Sciences 2010* .
C • Semay , B • Silvestre - Brac • "Relativité restreinte". *Dunod 2010.*
J - M. Souriau."Calcul Linéaire ".*PUF 1964* .
N.M.J. Woodhouse . " Special Relativity " • *Springer 2002* .